

2 Gelijkvormigheid

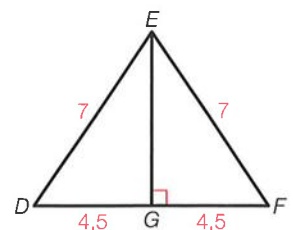
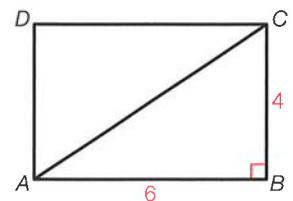
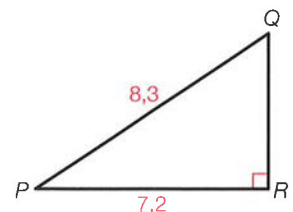
Voorkennis Berekeningen in driehoeken

Bladzijde 54

- 1 In $\triangle ABC$ is $\angle C = 90^\circ$, dus $AC^2 + BC^2 = AB^2$
 $5^2 + 2^2 = AB^2$
 $AB^2 = 25 + 4 = 29$
 $AB = \sqrt{29} \approx 5,39 \text{ cm}$
- In $\triangle DEF$ is $\angle D = 90^\circ$, dus $DE^2 + DF^2 = EF^2$
 $DE^2 + 3^2 = 5,8^2$
 $DE^2 = 33,64 - 9 = 24,64$
 $DE = \sqrt{24,64} \approx 4,96 \text{ cm}$
- In $\triangle QRS$ is $\angle S = 90^\circ$, dus $QS^2 + RS^2 = QR^2$
 $QS^2 + 4^2 = 4,6^2$
 $QS^2 = 21,16 - 16 = 5,16$
 $QS = \sqrt{5,16} = 2,271\dots$
- Dus $PQ = 2 \cdot 2,271\dots \approx 4,54 \text{ cm}$

Bladzijde 55

- 2 a Zie de figuur hiernaast.
 $\angle R = 90^\circ$, dus $PR^2 + QR^2 = PQ^2$
 $7,2^2 + QR^2 = 8,3^2$
 $QR^2 = 68,89 - 51,84 = 17,05$
 $QR = \sqrt{17,05} \approx 4,13 \text{ cm}$
- b Zie de figuur hiernaast.
 In $\triangle ABC$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $AB^2 + BC^2 = AC^2$
 $6^2 + 4^2 = AC^2$
 $AC^2 = 36 + 16 = 52$
 $AC = \sqrt{52} \approx 7,21 \text{ cm}$
 Dus elke diagonaal is 7,21 cm.
- c Zie de figuur hiernaast.
 In $\triangle EFG$ is $\angle G = 90^\circ$, dus $EG^2 + FG^2 = EF^2$
 $EG^2 + 4,5^2 = 7^2$
 $EG^2 = 49 - 20,25 = 28,75$
 $EG = \sqrt{28,75} \approx 5,36 \text{ cm}$
 Dus de hoogte die bij zijde DF hoort is 5,36 cm.
- 3 a $\angle C_1 = \angle C_2 = 105^\circ$ (overstaande hoeken)
 $\angle B = \angle E = 46^\circ$ (Z-hoeken)
 $\angle A = 180^\circ - 105^\circ - 46^\circ = 29^\circ$ (hoekensom driehoek)
- b $\angle P = 180^\circ - 82^\circ - 31^\circ = 67^\circ$ (hoekensom driehoek)
 $\angle T_1 = \angle Q = 31^\circ$ (F-hoeken)
 $\angle T_2 = 180^\circ - 31^\circ = 149^\circ$ (gestrekte hoek)
- 4 a $\angle K = \angle L_1 = 32^\circ$ (basishoeken)
 $\angle M = 180^\circ - 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$ (hoekensom driehoek)
 $\angle N_1 = 180^\circ - 32^\circ - 32^\circ = 116^\circ$ (hoekensom driehoek)
 $\angle N_2 = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$ (gestrekte hoek)
- b $\angle A_{12} = \angle B_3 = 68^\circ$ (F-hoeken)
 $\angle D_1 = 180^\circ - 32^\circ - 68^\circ = 80^\circ$ (hoekensom driehoek)
 $\angle A_1 = 68^\circ - 38^\circ = 30^\circ$
 $\angle C_2 = \angle A_1 = 30^\circ$ (Z-hoeken)
 $\angle S_1 = 180^\circ - 32^\circ - 30^\circ = 118^\circ$ (hoekensom driehoek)
 $\angle S_2 = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$ (gestrekte hoek)



2.1 Kruisproducten en parallelprojectie

Bladzijde 56

$$1 \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} 3 & 12 & 2 & 20 & 300 \\ \hline 5 & 20 & 3\frac{1}{3} & 33\frac{1}{3} & 500 \end{array}$$

- 2 $2 \cdot 25 = 50$ en $10 \cdot 5 = 50$, dus $2 \cdot 25 = 10 \cdot 5$.
 $10 \cdot 21 = 210$ en $14 \cdot 15 = 210$, dus $10 \cdot 21 = 14 \cdot 15$.
 De twee vermenigvuldigingen hebben steeds dezelfde uitkomst.

Bladzijde 57

$$3 \quad a \quad x = \frac{8 \cdot 95}{15} = 50\frac{2}{3}$$

$$b \quad \begin{aligned} 7(x+1) &= 2(x-5) \\ 7x+7 &= 2x-10 \\ 5x &= -17 \\ x &= \frac{-17}{5} = -3\frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$c \quad \begin{aligned} 2x &= 4(1,5 - x) \\ 2x &= 6 - 4x \\ 6x &= 6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$4 \quad a \quad x = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14$$

$$b \quad x = \frac{2,3 \cdot 12}{4} = 6,9$$

$$c \quad x = \frac{5 \cdot 30}{9} = 16\frac{2}{3}$$

$$5 \quad a \quad \begin{aligned} 5(x-1) &= 3(x+3) \\ 5x-5 &= 3x+9 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

$$b \quad \begin{aligned} 3(2x+1) &= 4(x-1) \\ 6x+3 &= 4x-4 \\ 2x &= -7 \\ x &= \frac{-7}{2} = -3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$c \quad \begin{aligned} 12(x-1) &= 5 \cdot 7,2 \\ 12x-12 &= 36 \\ 12x &= 48 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$6 \quad a \quad \begin{aligned} 7,9x &= 2,3(3x+2) \\ 7,9x &= 6,9x+4,6 \\ x &= 4,6 \end{aligned}$$

$$b \quad x = \frac{15 \cdot 9}{4} = 33\frac{3}{4}$$

$$c \quad \begin{aligned} 3(7+2x) &= 2(1-x) \\ 21+6x &= 2-2x \\ 8x &= -19 \\ x &= \frac{-19}{8} = -2\frac{3}{8} \end{aligned}$$

Bladzijde 58

$$7 \quad a \quad \frac{6}{21} \mid \frac{9}{x} \text{ geeft } x = \frac{21 \cdot 9}{6} = 31\frac{1}{2}$$

$$\frac{6}{21} \mid \frac{y}{84} \text{ geeft } y = \frac{6 \cdot 84}{21} = 24$$

$$b \quad \frac{8}{15} \mid \frac{x-3}{x+7,5} \text{ geeft } \begin{aligned} 15(x-3) &= 8(x+7,5) \\ 15x-45 &= 8x+60 \\ 7x &= 105 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

$$\frac{8}{15} \mid \frac{2y}{y-11} \text{ geeft } \begin{aligned} 15 \cdot 2y &= 8(y-11) \\ 30y &= 8y-88 \\ 22y &= -88 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

$$c \quad \frac{2x}{4} \mid \frac{1-x}{3} \text{ geeft } \begin{aligned} 2x \cdot 3 &= 4(1-x) \\ 6x &= 4-4x \\ 10x &= 4 \\ x &= \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\frac{2 \cdot \frac{2}{5} \mid 3y}{4 \mid 15} \text{ geeft } 4 \cdot 3y = \frac{4}{5} \cdot 15$$

$$12y = 12$$

$$y = 1$$

8 a $\frac{18 \mid x}{25 \mid 17} \text{ geeft } x = \frac{17 \cdot 18}{25} = 12\frac{6}{25}$

$$\frac{18 \mid 81}{25 \mid y} \text{ geeft } y = \frac{25 \cdot 81}{18} = 112\frac{1}{2}$$

b $\frac{15 \mid x+3}{7 \mid x} \text{ geeft } 15x = 7(x+3)$

$$15x = 7x + 21$$

$$8x = 21$$

$$x = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$$

$$\frac{15 \mid y}{7 \mid y-5} \text{ geeft } 15(y-5) = 7y$$

$$15y - 75 = 7y$$

$$8y = 75$$

$$y = \frac{75}{8} = 9\frac{3}{8}$$

c $\frac{x+5 \mid x}{2 \mid 3} \text{ geeft } 3(x+5) = 2x$

$$3x + 15 = 2x$$

$$x = -15$$

$$\frac{-15 \mid 4y}{3 \mid 1-y} \text{ geeft } -15(1-y) = 3 \cdot 4y$$

$$-15 + 15y = 12y$$

$$3y = 15$$

$$y = 5$$

- 9 a** De lengte van de schaduw verandert niet.
b De schaduw schuift steeds verder omhoog.

- 10 a** 4 kubussen hebben een schaduw van 6 cm, dus 1 kubus heeft een schaduw van $\frac{6}{4} = 1,5$ cm, dus als je zes van zulke kubussen opstapelt is de schaduw $6 \cdot 1,5 = 9$ cm.
b 1 kubus heeft een schaduw van 1,5 cm, dus een toren met een schaduw van 24 cm bestaat uit $\frac{24}{1,5} = 16$ kubussen.

c

aantal kubussen	4	6	16	20	40
lengte schaduw in cm	6	9	24	30	60

Bladzijde 59

- 11** Hierbij hoort de verhoudingstabel $\frac{80 \mid 120 \mid 72 \mid 60}{88 \mid a \mid b \mid c}$.

$$\frac{80 \mid 120}{88 \mid a} \text{ geeft } a = \frac{88 \cdot 120}{80} = 132 \text{ cm}$$

$$\frac{80 \mid 72}{88 \mid b} \text{ geeft } b = \frac{88 \cdot 72}{80} = 79,2 \text{ cm}$$

$$\frac{80 \mid 60}{88 \mid c} \text{ geeft } c = \frac{88 \cdot 60}{80} = 66 \text{ cm}$$

Bladzijde 60

12 a Hierbij hoort de verhoudingstabel $\begin{array}{c|c|c} y & 20 & 40 \\ \hline 22 & x & 32 \end{array}$.

$$\begin{array}{c|c} y & 40 \\ \hline 22 & 32 \end{array} \text{ geeft } y = \frac{22 \cdot 40}{32} = 27,5$$

Dus de toren is $40 + 20 + 27,5 = 87,5$ meter hoog.

b $\begin{array}{c|c} 20 & 40 \\ \hline x & 32 \end{array}$ geeft $x = \frac{20 \cdot 32}{40} = 16$

De schaduw is $22 + 16 + 32 = 70$ meter lang.

13 a $RS = x$ meter geeft $QR = x + 1$ meter en $PQ = x + 2$ meter.

Hierbij hoort de verhoudingstabel $\begin{array}{c|c|c} PQ & QR & RS \\ \hline P'Q' & Q'R' & R'S' \end{array}$ oftewel $\begin{array}{c|c|c} x+2 & x+1 & x \\ \hline P'Q' & 18,75 & 17,50 \end{array}$.

$$\begin{array}{c|c} x+1 & x \\ \hline 18,75 & 17,50 \end{array} \text{ geeft } 18,75x = 17,50(x+1)$$

$$18,75x = 17,50x + 17,50$$

$$1,25x = 17,50$$

$$x = \frac{17,50}{1,25} = 14$$

Dus $PQ = 14 + 2 = 16$ meter, $QR = 14 + 1 = 15$ meter en $PS = 16 + 15 + 14 = 45$ meter.

b Uit vraag a volgt de verhoudingstabel $\begin{array}{c|c|c} 16 & 15 & 14 \\ \hline P'Q' & 18,75 & 17,50 \end{array}$.

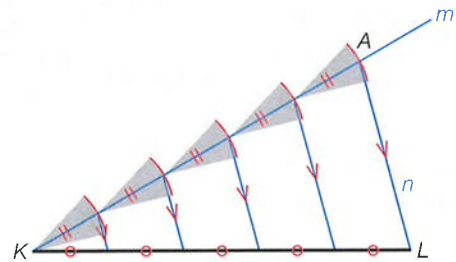
$$\begin{array}{c|c} 16 & 15 \\ \hline P'Q' & 18,75 \end{array} \text{ geeft } P'Q' = \frac{16 \cdot 18,75}{15} = 20 \text{ meter}$$

14 a *

Zie de figuur hiernaast.

Aanpak

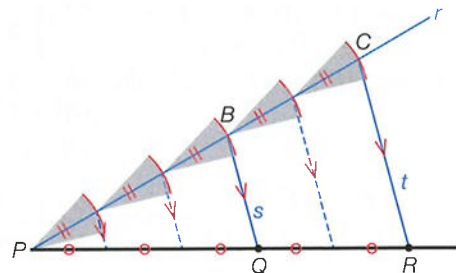
- Teken een lijnstuk KL .
- Teken een halve lijn m met eindpunt K .
- Zet hierop met de passer vijf gelijke lijnstukken uit. Het punt A is het snijpunt van het laatste cirkelboogje en lijn m .
- Teken door de punten A en L de lijn n .
- Construeer vervolgens vier lijnen evenwijdig met lijn n , door de andere snijpunten van de cirkelboogjes en lijn m .
- Omdat de lijnstukken op m even lang zijn, zijn de projecties van deze lijnstukken op het lijnstuk KL ook even lang. KL is dus in vijf gelijke stukken verdeeld.



b Zie de figuur hiernaast. Er geldt dat $PR = 1\frac{2}{3}PQ$.

Aanpak

- Teken een lijnstuk PQ en verleng deze aan de kant van Q .
- Teken een halve lijn r met eindpunt P .
- Zet hierop met de passer vijf gelijke lijnstukken uit. Het snijpunt van het derde cirkelboogje en lijn r noemen we B , en van het vijfde cirkelboogje en r noemen we C .
- Teken de lijn s door B en Q . Nu is PQ op de manier van vraag a in drie gelijke stukken te verdelen.
- Construeer de lijn t door het punt C , evenwijdig met s . R is het snijpunt van t en het verlengde van PQ .
- Er geldt $QR = \frac{2}{3}PQ$ oftewel $PR = 1\frac{2}{3}PQ$.



Merk op dat de gestippelde evenwijdige lijnen niet getekend hoeven te worden.

2.2 Gelijkvormigheid

Bladzijde 61

15 a De vergrotingsfactor is $k = \frac{AC'}{AB'} = \frac{3}{1,5} = 2$.

b $CC' = k \cdot BB' = 2 \cdot 0,8 = 1,6$ meter
 $AC = k \cdot AB = 2 \cdot 1,2 = 2,4$ meter
 $BC = AC - AB = 2,4 - 1,2 = 1,2$ meter

c

1,2	0,8	1,5
2,4	1,6	3

Ja, de tabel is een verhoudingstabel.

Bladzijde 62

16 a $\triangle ABC \sim \triangle QRP$

b

AB	BC	AC
QR	RP	QP

 geeft

18	16	12
8	RP	QP

 $PQ = \frac{8 \cdot 12}{18} = 5\frac{1}{3}$ en $PR = \frac{8 \cdot 16}{18} = 7\frac{1}{9}$.

17 a $\triangle PQR \sim \triangle PTS$

b

PQ	QR	PR
PT	TS	PS

 geeft

12	8	7
5	TS	PS

 $PS = \frac{5 \cdot 7}{12} \approx 2,9$ en $ST = \frac{5 \cdot 8}{12} \approx 3,3$.

18 a $\triangle ABC \sim \triangle EBD$

b

AB	BC	AC
EB	BD	ED

 geeft

6,1	3,2	4,3
EB	BD	7,6

 $BD = \frac{3,2 \cdot 7,6}{4,3} \approx 5,7$ en $BE = \frac{6,1 \cdot 7,6}{4,3} \approx 10,8$.

Bladzijde 63

19 a $\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle A_2 \text{ (gegeven)} \\ \angle B = \angle E \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle AED \text{ (hh)}$

b

AB	BC	AC
AE	ED	AD

 geeft

6	4	3
8	ED	AD

 $AD = \frac{8 \cdot 3}{6} = 4$, $DE = \frac{8 \cdot 4}{6} = 5\frac{1}{3}$ en $CD = AD - AC = 4 - 3 = 1$.

Bladzijde 64

20 a $\left. \begin{array}{l} \angle A \text{ (in } \triangle ABC) = \angle A \text{ (in } \triangle ADE) \\ \angle C_1 = \angle D (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle AED \text{ (hh)}$

b In $\triangle ABC$ is $\angle C_1 = 90^\circ$, dus $AB^2 = AC^2 + BC^2$
 $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$
 $AB = \sqrt{25} = 5$

AB	BC	AC
AE	ED	AD

 geeft

5	4	3
AE	9	AD

 $AE = \frac{5 \cdot 9}{4} = 11\frac{1}{4}$ en $AD = \frac{9 \cdot 3}{4} = 6\frac{3}{4}$.

21 $\left. \begin{array}{l} \angle B \text{ (in } \triangle ABC) = \angle B \text{ (in } \triangle BDE) \\ \angle A = \angle E (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle EBD \text{ (hh)}$

In $\triangle BDE$ is $\angle E = 90^\circ$, dus $BD^2 = BE^2 + DE^2$
 $BD^2 = 12^2 + 5^2 = 169$
 $BD = \sqrt{169} = 13$

$\frac{AB}{EB}$	$\frac{BC}{BD}$	$\frac{AC}{ED}$	geeft	$\frac{18}{12}$	$\frac{BC}{13}$	$\frac{AC}{5}$
-----------------	-----------------	-----------------	-------	-----------------	-----------------	----------------

$BC = \frac{18 \cdot 13}{12} = 19\frac{1}{2}$ en $CE = BC - BE = 19\frac{1}{2} - 12 = 7\frac{1}{2}$.

22 $\left. \begin{array}{l} \angle A \text{ (in } \triangle ABC) = \angle A \text{ (in } \triangle ACD) \\ \angle C_{12} = \angle D (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle ACD \text{ (hh)}$

In $\triangle ABC$ is $\angle C_{12} = 90^\circ$, dus $AB^2 = AC^2 + BC^2$
 $AB^2 = 20^2 + 15^2 = 625$
 $AB = \sqrt{625} = 25$

$\frac{AB}{AC}$	$\frac{BC}{CD}$	$\frac{AC}{AD}$	geeft	$\frac{25}{20}$	$\frac{15}{CD}$	$\frac{20}{AD}$
-----------------	-----------------	-----------------	-------	-----------------	-----------------	-----------------

$AD = \frac{20 \cdot 20}{25} = 16$ en $BD = AB - AD = 25 - 16 = 9$.

23 $\left. \begin{array}{l} \angle B \text{ (in } \triangle ABC) = \angle B \text{ (in } \triangle BDE) \text{ (gegeven)} \\ \angle A = \angle D (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DBE \text{ (hh)}$

$\frac{AB}{DB}$	$\frac{BC}{BE}$	$\frac{AC}{DE}$	geeft	$\frac{3,5}{68,4}$	$\frac{BC}{BE}$	$\frac{1,76}{DE}$
-----------------	-----------------	-----------------	-------	--------------------	-----------------	-------------------

$DE = \frac{68,4 \cdot 1,76}{3,5} \approx 34,4$

Dus de hoogte van de mast is 34,4 meter.

24 $\left. \begin{array}{l} \angle B \text{ (in } \triangle BCF) = \angle C \text{ (in } \triangle ACD) \text{ (gegeven)} \\ \angle C \text{ (in } \triangle BCF) = \angle A (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle BCF \sim \triangle CAD \text{ (hh)}$

$\frac{BC}{CA}$	$\frac{CF}{AD}$	$\frac{BF}{CD}$	geeft	$\frac{5}{8}$	$\frac{CF}{AD}$	$\frac{7}{CD}$
-----------------	-----------------	-----------------	-------	---------------	-----------------	----------------

$CD = \frac{8 \cdot 7}{5} = 11,2$

Dus de ladder CD is 11,2 meter.

2.3 Gelijkvormige driehoeken

Bladzijde 65

25 $\triangle BEF \sim \triangle AED$ en $\triangle BEF \sim \triangle CDF$.

Bladzijde 66

26 $\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle D_1 \text{ (F-hoeken)} \\ \angle C \text{ (in } \triangle ABC) = \angle C \text{ (in } \triangle CDE) \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DEC \text{ (hh)}$

$\frac{AB}{DE}$	$\frac{BC}{EC}$	$\frac{AC}{DC}$	geeft	$\frac{30}{20}$	$\frac{BC}{21}$	$\frac{AC}{24}$
-----------------	-----------------	-----------------	-------	-----------------	-----------------	-----------------

$AC = \frac{30 \cdot 24}{20} = 36$ en $AD = AC - CD = 36 - 24 = 12$.

$BC = \frac{30 \cdot 21}{20} = 31\frac{1}{2}$ en $BE = BC - CE = 31\frac{1}{2} - 21 = 10\frac{1}{2}$.

27 In $\triangle QRS$ is $\angle R = 90^\circ$, dus $QS^2 = QR^2 + RS^2$
 $QS^2 = 8^2 + 6^2 = 100$
 $QS = \sqrt{100} = 10$

$\left. \begin{array}{l} \angle P = \angle R (= 90^\circ) \\ \angle T = \angle S \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle PQT \sim \triangle RQS \text{ (hh)}$

$\frac{PQ}{RQ} \mid \frac{QT}{QS} \mid \frac{PT}{RS} \text{ geeft } \frac{20}{8} \mid \frac{QT}{10} \mid \frac{PT}{6}$

$PT = \frac{20 \cdot 6}{8} = 15$ en $QT = \frac{20 \cdot 10}{8} = 25$.

28 $\left. \begin{array}{l} \angle A \text{ (in } \triangle APQ) = \angle D \text{ (F-hoeken)} \\ \angle P \text{ (in } \triangle APQ) = \angle P \text{ (in } \triangle CDP) \end{array} \right\} \triangle APQ \sim \triangle DPC \text{ (hh)}$

$\frac{AP}{DP} \mid \frac{PQ}{PC} \mid \frac{AQ}{DC} \text{ geeft } \frac{3}{9} \mid \frac{PQ}{PC} \mid \frac{AQ}{12}$

$AQ = \frac{3 \cdot 12}{9} = 4$

29 $\left. \begin{array}{l} \angle B = \angle A (= 90^\circ) \\ \angle C \text{ (in } \triangle BCE) = \angle C \text{ (in } \triangle ACD) \end{array} \right\} \triangle BCE \sim \triangle ACD \text{ (hh)}$

$\frac{BC}{AC} \mid \frac{CE}{CD} \mid \frac{BE}{AD} \text{ geeft } \frac{1,30}{21,30} \mid \frac{CE}{CD} \mid \frac{1,75}{AD}$

$AD = \frac{21,30 \cdot 1,75}{1,30} \approx 28,7$

Dus de hoogte van de boom is 28,7 meter.

Bladzijde 67

30 $\left. \begin{array}{l} \angle B = \angle D (= 90^\circ) \\ \angle A = \angle E \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle EDC \text{ (hh)}$

$\frac{AB}{ED} \mid \frac{BC}{DC} \mid \frac{AC}{EC} \text{ geeft } \frac{25}{ED} \mid \frac{8}{20} \mid \frac{AC}{EC}$

$DE = \frac{25 \cdot 20}{8} = 62,5$

Dus de breedte van het kanaal is 62,5 meter.

31 Zie de figuur hiernaast.

In $\triangle EST'$ is $\angle E = 90^\circ$, dus $ST'^2 = ES^2 + ET'^2$
 $ST'^2 = 115^2 + 315^2 = 112450$
 $ST' = \sqrt{112450} = 335,33\dots$

Bram geven we aan met het lijnstuk HV en zijn schaduw met het lijnstuk $H'V$. Zie de figuur hiernaast.

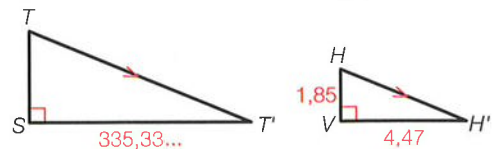
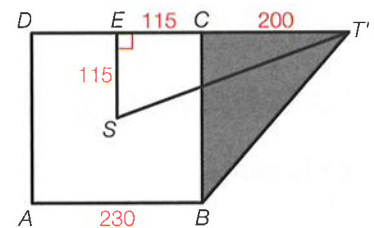
$\left. \begin{array}{l} \angle S = \angle V (= 90^\circ) \\ \angle T' = \angle H' \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle STT' \sim \triangle VHH' \text{ (hh)}$

$\frac{ST}{VH} \mid \frac{TT'}{HH'} \mid \frac{ST'}{VH'} \text{ geeft } \frac{ST}{1,85} \mid \frac{TT'}{HH'} \mid \frac{335,33\dots}{4,47}$

$ST = \frac{1,85 \cdot 335,33\dots}{4,47} \approx 139$

Dus de hoogte van de piramide is 139 meter.

32 Je kunt PQ niet berekenen met $PQ = \frac{PR \cdot QT}{RS}$ omdat je PR niet weet.



Bladzijde 68

33 a $\left. \begin{array}{l} \angle E \text{ (in } \triangle ADE) = \angle E \text{ (in } \triangle CEF) \\ \angle D = \angle C (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle ADE \sim \triangle FCE \text{ (hh)}$

Stel $CE = x$, dan is $DE = 8,4 + x$.

$$\frac{AD}{FC} \mid \frac{DE}{CE} \text{ geeft } \frac{6}{1,8} \mid \frac{8,4 + x}{x}$$

$$6x = 1,8(8,4 + x)$$

$$6x = 15,12 + 1,8x$$

$$4,2x = 15,12$$

$$x = \frac{15,12}{4,2} = 3,6, \text{ dus } CE = 3,6.$$

b In $\triangle CEF$ is $\angle C = 90^\circ$, dus $EF^2 = CE^2 + CF^2$
 $EF^2 = 3,6^2 + 1,8^2 = 16,2$
 $EF = \sqrt{16,2} \approx 4,0$

34 a $\left. \begin{array}{l} \angle B = \angle E \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle A = \angle D (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DEC \text{ (hh)}$

Stel $AC = x$, dan is $CD = 6,6 - x$.

$$\frac{BC}{EC} \mid \frac{AC}{DC} \text{ geeft } \frac{6,2}{2,6} \mid \frac{x}{6,6 - x}$$

$$2,6x = 6,2(6,6 - x)$$

$$2,6x = 40,92 - 6,2x$$

$$8,8x = 40,92$$

$$x = \frac{40,92}{8,8} = 4,65, \text{ dus } AC = 4,65.$$

b In $\triangle ABC$ is $\angle A = 90^\circ$, dus $AB^2 + AC^2 = BC^2$
 $AB^2 + 4,65^2 = 6,2^2$
 $AB^2 = 6,2^2 - 4,65^2 = 16,8175$
 $AB = \sqrt{16,8175} = 4,100\dots$

$$\text{opp } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 4,100\dots \cdot 4,65 \approx 9,5$$

35 a $\left. \begin{array}{l} \angle Q \text{ (in } \triangle ABQ) = \angle Q \text{ (in } \triangle PCQ) \\ \angle B = \angle C (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle ABQ \sim \triangle PCQ \text{ (hh)}$

$$\frac{AB}{PC} \mid \frac{BQ}{CQ} \text{ geeft } \frac{8}{PC} \mid \frac{7}{3}$$

$$CP = \frac{8 \cdot 3}{7} = 3\frac{3}{7}$$

b $DP = CD - CP = 8 - 3\frac{3}{7} = 4\frac{4}{7}$

In $\triangle ADP$ is $\angle D = 90^\circ$, dus $AP^2 = AD^2 + DP^2$

$$AP^2 = 4^2 + (4\frac{4}{7})^2 = 36,897\dots$$

$$AP = \sqrt{36,897\dots} \approx 6,1$$

Bladzijde 69

36 $\left. \begin{array}{l} \angle A \text{ (in } \triangle ADS) = \angle C \text{ (in } \triangle CES) \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle D \text{ (in } \triangle ADS) = \angle E \text{ (in } \triangle CES) \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ADS \sim \triangle CES \text{ (hh)}$

In $\triangle CDE$ is $\angle C = 90^\circ$, dus $DE^2 = CD^2 + CE^2$
 $DE^2 = 12^2 + 5^2 = 169$
 $DE = \sqrt{169} = 13$

Stel $DS = x$, dan is $ES = 13 - x$.

$$\frac{AD}{CE} \mid \frac{DS}{ES} \text{ geeft } \frac{7}{5} \mid \frac{x}{13-x}$$

$$5x = 7(13 - x)$$

$$5x = 91 - 7x$$

$$12x = 91$$

$$x = \frac{91}{12} \approx 7,6, \text{ dus } DS \approx 7,6.$$

37 a Zie de figuur hiernaast.
 $\left. \begin{array}{l} \angle A \text{ (in } \triangle ABC) = \angle A \text{ (in } \triangle ADE) \\ \angle B = \angle D (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle ADE \text{ (hh)}$

$$\frac{AB}{AD} \mid \frac{BC}{DE} \text{ geeft } \frac{x+6}{x} \mid \frac{9}{2}$$

$$9x = 2(x+6)$$

$$9x = 2x + 12$$

$$7x = 12$$

$$x = \frac{12}{7} \approx 1,7$$

Dus de lengte van deze schaduw is 1,7 meter.

b Zie de figuur hiernaast.
 Stel $BG = y$, dan is $BF = y + 3,5$.
 $\left. \begin{array}{l} \angle F \text{ (in } \triangle BCF) = \angle F \text{ (in } \triangle FGH) \\ \angle B = \angle G (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle BFC \sim \triangle GFH \text{ (hh)}$

$$\frac{BF}{GF} \mid \frac{BC}{GH} \text{ geeft } \frac{y+3,5}{3,5} \mid \frac{9}{2,5}$$

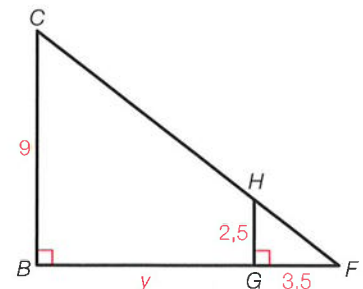
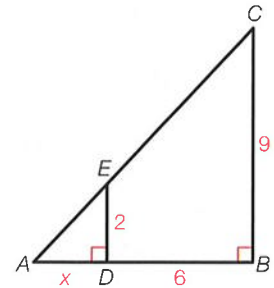
$$2,5(y+3,5) = 9 \cdot 3,5$$

$$2,5y + 8,75 = 31,5$$

$$2,5y = 22,75$$

$$y = \frac{22,75}{2,5} = 9,1$$

De afstand van de rechtermuur tot de lantaarnpaal is 9,1 meter.



38 a Zie de figuur hiernaast.
 In $\triangle ADF$ is $\angle D_1 = 180^\circ - 90^\circ - \angle A_1$ (hoekensom driehoek)
 $= 90^\circ - \angle A_1$
 Verder is $\angle A_2 = 180^\circ - 90^\circ - \angle A_1$ (gestrekte hoek)
 $= 90^\circ - \angle A_1$

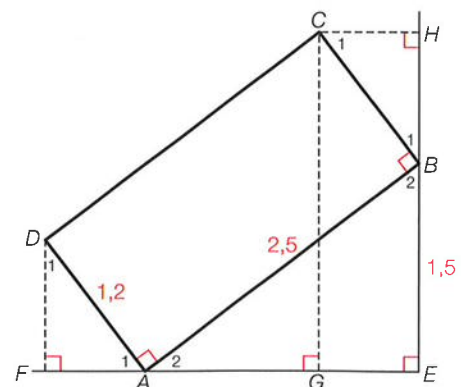
Dus $\angle D_1 = \angle A_2$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle D_1 = \angle A_2 \\ \angle F = \angle E (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle ADF \sim \triangle BAE \text{ (hh)}$$

In $\triangle ABE$ is $\angle E = 90^\circ$, dus $AE^2 + BE^2 = AB^2$
 $AE^2 + 1,5^2 = 2,5^2$
 $AE^2 = 2,5^2 - 1,5^2 = 4$
 $AE = \sqrt{4} = 2$

$$\frac{AD}{BA} \mid \frac{DF}{AE} \text{ geeft } \frac{1,2}{2,5} \mid \frac{DF}{2}$$

$$DF = \frac{1,2 \cdot 2}{2,5} = 0,96 \text{ meter}$$



- b In $\triangle BCH$ is $\angle C_1 = 180^\circ - 90^\circ - \angle B_1$ (hoekensom driehoek)
 $= 90^\circ - \angle B_1$

Verder is $\angle B_2 = 180^\circ - 90^\circ - \angle B_1$ (gestrekte hoek)
 $= 90^\circ - \angle B_1$

Dus $\angle C_1 = \angle B_2$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle B_2 = \angle C_1 \\ \angle E = \angle H (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle AEB \sim \triangle BHC \text{ (hh)}$$

$$\frac{AE}{BH} \mid \frac{AB}{BC} \text{ geeft } \frac{2}{BH} \mid \frac{2,5}{1,2}$$

$$BH = \frac{2 \cdot 1,2}{2,5} = 0,96$$

Dus $CG = BE + BH = 1,5 + 0,96 = 2,46$ meter.

- 39 a $\angle A$ (in $\triangle ABS$) = $\angle C$ (in $\triangle CDS$) (Z-hoeken) } $\triangle ABS \sim \triangle CDS$ (hh)
 $\angle B$ (in $\triangle ABS$) = $\angle D$ (in $\triangle CDS$) (Z-hoeken)

In $\triangle BCD$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $BD^2 + BC^2 = CD^2$
 $BD^2 + 15^2 = 25^2$
 $BD^2 = 25^2 - 15^2 = 400$
 $BD = \sqrt{400} = 20$

Stel $BS = x$, dan is $DS = 20 - x$.

$$\frac{AB}{CD} \mid \frac{BS}{DS} \text{ geeft } \frac{10}{25} \mid \frac{x}{20-x}$$

$$25x = 10(20 - x)$$

$$25x = 200 - 10x$$

$$35x = 200$$

$$x = \frac{200}{35} = 5\frac{5}{7}, \text{ dus } BS = 5\frac{5}{7}.$$

In $\triangle BCS$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $CS^2 = BS^2 + BC^2$

$$CS^2 = (5\frac{5}{7})^2 + 15^2 = 257,65\dots$$

$$CS = \sqrt{257,65\dots} \approx 16,1$$

b $\frac{AB}{CD} \mid \frac{AS}{CS} \text{ geeft } \frac{10}{25} \mid \frac{AS}{16,05\dots}$

$$AS = \frac{10 \cdot 16,05\dots}{25} = 6,42\dots$$

Dus $AC = AS + CS = 6,42\dots + 16,05\dots \approx 22,5$.

Bladzijde 71

- 40 In $\triangle EFG$ is $\angle F = 90^\circ$, dus $EG^2 = EF^2 + FG^2$

$$EG^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

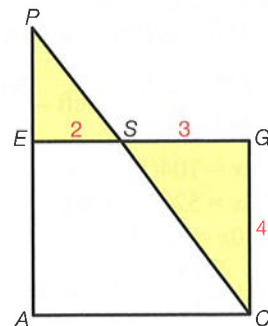
$$EG = \sqrt{25} = 5$$

Zie de schets hiernaast met $GS = EG - ES = 5 - 2 = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle E = \angle G (= 90^\circ) \\ \angle P = \angle C \text{ (in } \triangle CGS) \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle EPS \sim \triangle GCS \text{ (hh)}$$

$$\frac{EP}{GC} \mid \frac{ES}{GS} \text{ geeft } \frac{EP}{4} \mid \frac{2}{3}$$

$$EP = \frac{4 \cdot 2}{3} = 2\frac{2}{3}$$



- 41 In $\triangle ABC$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$AC^2 = 6^2 + (4\frac{1}{2})^2 = 56\frac{1}{4}$$

$$AC = \sqrt{56\frac{1}{4}} = 7\frac{1}{2}$$

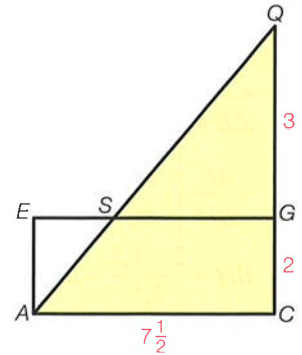
Zie de figuur hiernaast.

$$\angle C = \angle G (= 90^\circ)$$

$$\angle Q \text{ (in } \triangle ACQ) = \angle Q \text{ (in } \triangle GQS) \} \triangle ACQ \sim \triangle GQS \text{ (hh)}$$

$$\frac{AC}{SG} \mid \frac{CQ}{GQ} \text{ geeft } \frac{7\frac{1}{2}}{SG} \mid \frac{5}{3}$$

$$GS = \frac{7\frac{1}{2} \cdot 3}{5} = 4\frac{1}{2} \text{ en } ES = EG - GS = 7\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} = 3.$$



- 42 Zie de figuur hiernaast.

$$\angle A = \angle D (= 90^\circ)$$

$$\angle P \text{ (in } \triangle AQP) = \angle P \text{ (in } \triangle DHP) \} \triangle AQP \sim \triangle DHP \text{ (hh)}$$

$$\frac{AQ}{DH} \mid \frac{AP}{DP} \text{ geeft } \frac{AQ}{4} \mid \frac{3}{5}$$

$$AQ = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2\frac{2}{5}$$

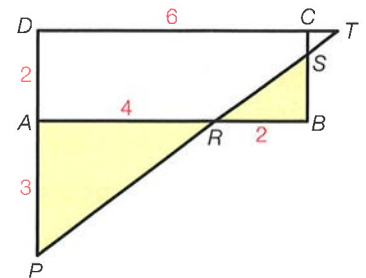
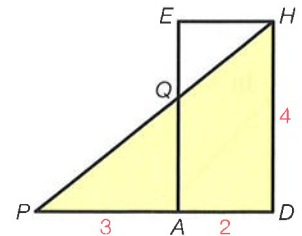
Zie de figuur hiernaast met $BR = AB - AR = 6 - 4 = 2$.

$$\angle A = \angle B (= 90^\circ)$$

$$\angle P = \angle S \text{ (in } \triangle RBS) \text{ (Z-hoeken)} \} \triangle APR \sim \triangle BSR \text{ (hh)}$$

$$\frac{AP}{BS} \mid \frac{AR}{BR} \text{ geeft } \frac{3}{BS} \mid \frac{4}{2}$$

$$BS = \frac{3 \cdot 2}{4} = 1\frac{1}{2}$$



- 43 De uitgebreide stelling van Pythagoras geeft

$$(\text{lengte stok})^2 = 96^2 + 72^2 + 50^2 = 16900,$$

$$\text{dus lengte stok} = \sqrt{16900} = 130 \text{ cm.}$$

Zie hiernaast een schets van het grondvlak ABCD van het aquarium.

$$\text{In } \triangle ABD \text{ is } \angle A = 90^\circ, \text{ dus } BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$BD^2 = 96^2 + 72^2 = 14400$$

$$BD = \sqrt{14400} = 120 \text{ cm}$$

De stok steekt $130 - 26 = 104$ cm in het water.

Zie hiernaast een schets van het diagonaalvlak met daarin de stok.

Stel de hoogte van het water $DP = x$. Dan is $HP = 50 - x$.

$$\angle P = \angle Q (= 90^\circ)$$

$$\angle H \text{ (in } \triangle HPS) = \angle B \text{ (in } \triangle BQS) \text{ (Z-hoeken)} \} \triangle HPS \sim \triangle BQS \text{ (hh)}$$

$$\frac{HP}{BQ} \mid \frac{HS}{BS} \text{ geeft } \frac{50 - x}{x} \mid \frac{26}{104}$$

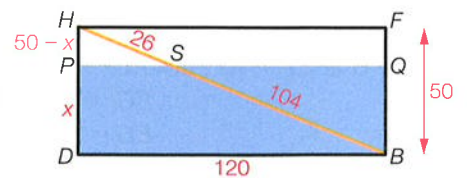
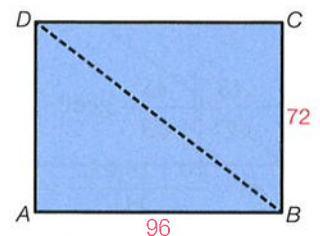
$$26x = 104(50 - x)$$

$$26x = 5200 - 104x$$

$$130x = 5200$$

$$x = \frac{5200}{130} = 40, \text{ dus de hoogte van het water is } 40 \text{ cm.}$$

Dus er zit $96 \cdot 72 \cdot 40 = 276480 \text{ cm}^3 = 276,48 \text{ dm}^3 \approx 276 \text{ L}$ water in het aquarium.



2.4 Bewijzen met gelijkvormigheid

Bladzijde 72

$$\left. \begin{array}{l} 44 \quad \angle A = \angle C_1 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle B = \angle C_3 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_3 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle A + \angle C_2 + \angle B = 180^\circ$$

Bladzijde 73

- 45 a In het bewijs wordt gebruik gemaakt van Z-hoeken. Dit mag alleen als geldt dat $AB \parallel CD$ en $AD \parallel BC$. Volgens de definitie van een parallellogram zijn deze zijden inderdaad evenwijdig.
- b $\left. \begin{array}{l} \angle B_1 = \angle D_2 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle B_2 = \angle D_1 \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle B_1 + \angle B_2 = \angle D_1 + \angle D_2 \\ \angle B_{12} = \angle D_{12} \end{array}$
- c In vraag b is bewezen dat $\angle B_{12} = \angle D_{12}$ en in de theorie is bewezen dat $\angle A_{12} = \angle C_{12}$, dus nu is bewezen dat in een parallellogram de overstaande hoeken even groot zijn.

Bladzijde 74

$$46 \quad \left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle A_2 = \angle C_1 \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle CDA \text{ (hh)}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle CDA \text{ geeft } \frac{AB}{CD} = \frac{BC}{DA} = \frac{AC}{AC}$$

$AC = AC$, dus $AB = CD$ en $BC = DA$.

Dus de overstaande zijden in een parallellogram zijn even lang.

$$47 \quad \left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle B_1 = \angle D_2 \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABS \sim \triangle CDS \text{ (hh)}$$

$$\triangle ABS \sim \triangle CDS \text{ geeft } \frac{AB}{CD} = \frac{BS}{DS} = \frac{AS}{CS}$$

Uit opgave 46 volgt $AB = CD$, dus $AS = CS$ en $BS = DS$.

Dus de diagonalen in een parallellogram delen elkaar middendoor.

$$48 \quad \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}, \text{ dus de vergrotingsfactor } k = \frac{1}{2}.$$

Bladzijde 75

$$49 \quad \left. \begin{array}{l} AC : BD = 1 : 1 \\ CD \text{ (in } \triangle ADC) : CD \text{ (in } \triangle BDC) = 1 : 1 \\ \angle D \text{ (in } \triangle ADC) = \angle D \text{ (in } \triangle BDC) (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle ACD \sim \triangle BCD \text{ (zzr)}$$

Uit de gelijkvormigheid $\triangle ACD \sim \triangle BCD$ volgt dat $\angle A = \angle B$, want van gelijkvormige driehoeken zijn de overeenkomstige hoeken gelijk.

Bladzijde 76

- 50 a In een gelijkbenige driehoek zijn de hoeken tegenover de even lange zijden even groot, dus $\angle A = \angle B$, en $\angle B = \angle C$. Hieruit volgt dat $\angle A = \angle B = \angle C$.
- b $\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle B = \angle C \\ \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot \angle C = 180^\circ, \text{ dus } \angle C = 60^\circ \\ \text{en } \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ. \end{array}$
- Dus in een gelijkzijdige driehoek zijn alle hoeken 60° .

51 a $\left. \begin{array}{l} \angle A_{12} = \angle B_2 \text{ (basisshoeken)} \\ \angle A_3 = \angle B_3 (= 90^\circ) \\ AE : AB = 1 : 1 \text{ (vierkant ABDE)} \\ BC = AC \text{ (gegeven)} \\ BC : BG = 1 : 1 \text{ (vierkant BCGF)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle A_{123} = \angle B_{23} \\ AC : BG = 1 : 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \angle A_{12} = \angle B_2 \\ \angle A_3 = \angle B_3 \\ AE : AB = 1 : 1 \\ BC = AC \\ BC : BG = 1 : 1 \end{array}} \right\} \triangle CAE \sim \triangle GBA \text{ (zhz)}$

b $\triangle CAE \sim \triangle GBA$, dus $\frac{CE}{GA} = \frac{AE}{BA}$ $\left. \vphantom{\frac{CE}{GA} = \frac{AE}{BA}} \right\} CE = AG$
 $AB = AE$ (vierkant ABDE)

52 $\left. \begin{array}{l} \angle B_1 = \angle B_3 = 60^\circ \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \\ \angle B_{12} = 60^\circ + \angle B_2 \\ \angle B_{23} = 60^\circ + \angle B_2 \\ AB : BC = 1 : 1 \text{ (gelijkzijdige driehoek ABC)} \\ BE : BD = 1 : 1 \text{ (gelijkzijdige driehoek BDE)} \end{array} \right\} \angle B_{23} = \angle B_{12} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \angle B_1 = \angle B_3 \\ \angle B_{12} = 60^\circ + \angle B_2 \\ \angle B_{23} = 60^\circ + \angle B_2 \\ AB : BC = 1 : 1 \\ BE : BD = 1 : 1 \end{array}} \right\} \triangle BCD \sim \triangle BAE \text{ (zhz)}$

$\triangle BCD \sim \triangle BAE$, dus $\frac{BC}{BA} = \frac{CD}{AE}$ $\left. \vphantom{\frac{BC}{BA} = \frac{CD}{AE}} \right\} AE = CD$
 $AB = BC$ (gelijkzijdige driehoek ABC)

53 a $\left. \begin{array}{l} \angle C \text{ (in } \triangle ABC) = \angle D (= 90^\circ) \\ \angle A \text{ (in } \triangle ABC) = \angle A \text{ (in } \triangle ACD) \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle ACD \text{ (hh)}$

b $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$ geeft $AC^2 = AB \cdot AD$

c $\left. \begin{array}{l} \angle C \text{ (in } \triangle ABC) = \angle D (= 90^\circ) \\ \angle B \text{ (in } \triangle ABC) = \angle B \text{ (in } \triangle CBD) \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle CBD \text{ (hh)}$

$\frac{AB}{CB} = \frac{BC}{BD}$ geeft $BC^2 = AB \cdot BD$

d $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot BD = AB(AD + BD) = AB \cdot AB = AB^2$, dus $AC^2 + BC^2 = AB^2$.
 Hiermee is de stelling van Pythagoras bewezen.

2.5 Middenparallel en zwaartelijn

Bladzijde 77

54 a $\left. \begin{array}{l} \angle A \text{ (in } \triangle APQ) = \angle A \text{ (in } \triangle ABC) \\ AQ : AC = 1 : 2 \\ AP : AB = 1 : 2 \end{array} \right\} \triangle APQ \sim \triangle ABC \text{ (zhz)}$

b Uit $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ en $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{2}$ volgt $\frac{PQ}{BC} = \frac{1}{2}$.

c Uit $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ volgt dat $\angle P_1 = \angle B$. Er is dus sprake van een paar even grote F-hoeken.
 Uit de stelling boven opgave 54 volgt dat $PQ \parallel BC$.

55 a $CD = BD = 3$, dus $BC = 6$.

$EF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$

$AC = 2DF = 2 \cdot 2 = 4$

$EC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

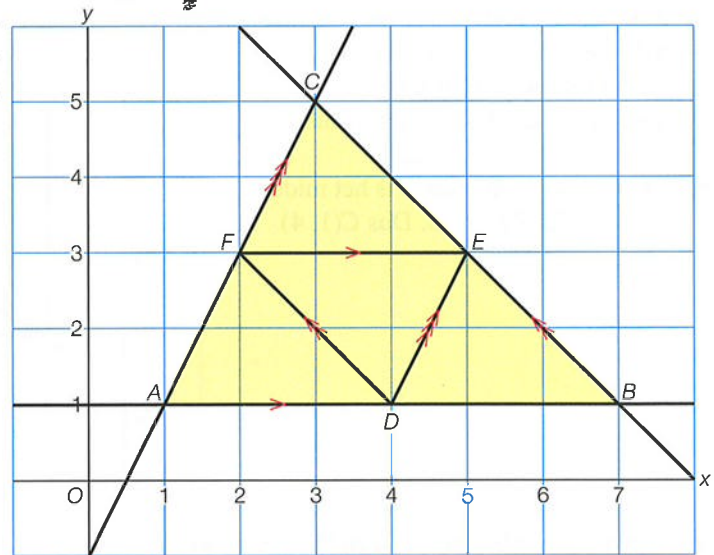
Dus de omtrek van vierhoek EFDC is $3 + 2 + 3 + 2 = 10$.

b $\angle A = \angle C$ (basisshoeken), dus $AB = BC = 6$.

Dus de omtrek van $\triangle ABC$ is $6 + 6 + 4 = 16$.

56 Aanpak

- Teken door D de lijn evenwijdig met EF .
- Teken door E de lijn evenwijdig met DF .
- Teken door F de lijn evenwijdig met DE .
- De snijpunten van deze lijnen zijn de hoekpunten A , B en C van $\triangle ABC$.

Uitwerking**Bladzijde 78**

- 57 a** In $\triangle ACD$ is RS een middenparallel, dus $RS \parallel AC$
 In $\triangle ABC$ is PQ een middenparallel, dus $PQ \parallel AC$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} RS \parallel AC \\ PQ \parallel AC \end{matrix}} \right\} PQ \parallel RS$
- b** In $\triangle ABD$ is PS een middenparallel, dus $PS \parallel BD$
 In $\triangle BCD$ is QR een middenparallel, dus $QR \parallel BD$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} PS \parallel BD \\ QR \parallel BD \end{matrix}} \right\} PS \parallel QR$
- $PS \parallel QR$
 $PQ \parallel RS$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} PS \parallel QR \\ PQ \parallel RS \end{matrix}} \right\} PQRS$ is een parallellogram.

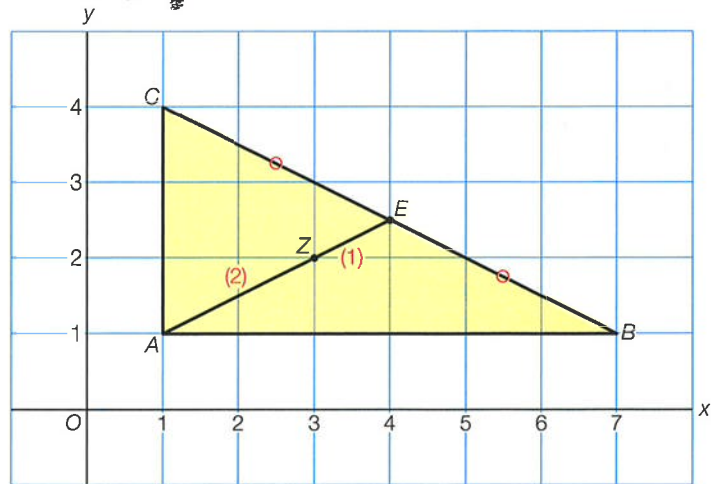
- 58 a** PR verbindt de middens van de zijden AB en AC , dus PR is een middenparallel.
- b** PR is een middenparallel, dus $PR \parallel BC$. Hieruit volgt dat
- $$\left. \begin{matrix} \angle R_2 = \angle C_1 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle P_2 = \angle B_1 \text{ (Z-hoeken)} \end{matrix} \right\} \triangle PRZ \sim \triangle BCZ \text{ (hh)}$$
- c** Uit $\triangle PRZ \sim \triangle BCZ$ volgt $\left. \begin{matrix} \frac{PR}{BC} = \frac{RZ}{CZ} = \frac{PZ}{BZ} \end{matrix} \right\} \frac{RZ}{CZ} = \frac{PZ}{BZ} = \frac{PR}{BC} = \frac{1}{2}$

Bladzijde 79

- 59 a** PS is zwaartelijn, dus $QS = \frac{1}{2}QR = 5$.
 In $\triangle PQS$ is $\angle Q = 90^\circ$, dus $PS^2 = PQ^2 + QS^2 = 12^2 + 5^2 = 169$
 $PS = \sqrt{169} = 13$
 Z is het zwaartepunt van $\triangle PQR$, dus $SZ = \frac{1}{3}PS = \frac{1}{3} \cdot 13 = 4\frac{1}{3}$.
- b** RT is zwaartelijn, dus $QT = \frac{1}{2}PQ = 6$.
 In $\triangle QRT$ is $\angle Q = 90^\circ$, dus $RT^2 = QR^2 + QT^2 = 10^2 + 6^2 = 136$
 $RT = \sqrt{136} = 11,661\dots$
 Z is het zwaartepunt van $\triangle PQR$, dus $RZ = \frac{2}{3}RT = \frac{2}{3} \cdot 11,661\dots \approx 7,77$.

60 Aanpak

- Z is zwaartepunt, dus er moet gelden $AZ : EZ = 2 : 1$. Van A naar Z is 2 naar rechts en 1 omhoog, dus van Z naar E is 1 naar rechts en 0,5 omhoog, dus $E(4; 2,5)$.
- AE is zwaartelijijn, dus E is het midden van BC , dus $BE = CE$. Dus $C(1, 4)$.

Uitwerking

- 61 a** In $\triangle ABC$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $BC^2 + AB^2 = AC^2$
 $BC^2 + 10^2 = 12,5^2$
 $BC^2 = 12,5^2 - 10^2 = 56,25$
 $BC = \sqrt{56,25} = 7,5$

CP is zwaartelijijn, dus $BP = \frac{1}{2}AB = 5$.

In $\triangle BCP$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $CP^2 = BC^2 + BP^2 = 56,25 + 5^2 = 81,25$
 $CP = \sqrt{81,25} \approx 9,01$

Z is het zwaartepunt van $\triangle ABC$, dus $CZ = \frac{2}{3}CP = \frac{2}{3} \cdot 9,013... \approx 6,01$.

- b** AQ is zwaartelijijn, dus $BQ = \frac{1}{2}BC = 3,75$.

In $\triangle ABQ$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $AQ^2 = AB^2 + BQ^2 = 10^2 + 3,75^2 = 114,0625$
 $AQ = \sqrt{114,0625} = 10,680...$

Z is het zwaartepunt van $\triangle ABC$, dus $QZ = \frac{1}{3}AQ = \frac{1}{3} \cdot 10,680... \approx 3,56$.

- 62** CQ is zwaartelijijn, dus $BQ = \frac{1}{2}AB = 4$.
 In $\triangle BCQ$ is $\angle Q = 90^\circ$, dus $CQ^2 + BQ^2 = BC^2$
 $CQ^2 + 4^2 = 5^2$
 $CQ^2 = 5^2 - 4^2 = 9$
 $CQ = \sqrt{9} = 3$

Z is het zwaartepunt van $\triangle ABC$, dus $QZ = \frac{1}{3}CQ = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$.

In $\triangle BQZ$ is $\angle Q = 90^\circ$, dus $BZ^2 = BQ^2 + QZ^2 = 4^2 + 1^2 = 17$
 $BZ = \sqrt{17} = 4,12...$

Z is het zwaartepunt van $\triangle ABC$, dus $BZ = \frac{2}{3}BP$ oftewel $\frac{2}{3}BP = 4,12...$

$$2BP = 3 \cdot 4,12...$$

$$BP = 1\frac{1}{2} \cdot 4,12... \approx 6,2$$

- 63** Zie de figuur hiernaast met $\triangle ABC$, zwaartelijijn BD en zwaartepunt Z .

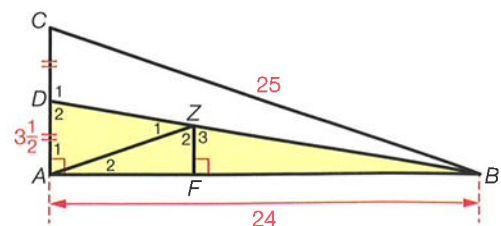
In $\triangle ABC$ is $\angle A = 90^\circ$, dus $AC^2 + AB^2 = BC^2$
 $AC^2 + 24^2 = 25^2$
 $AC^2 = 25^2 - 24^2 = 49$
 $AC = \sqrt{49} = 7$

BD is zwaartelijijn, dus $AD = \frac{1}{2}AC = 3\frac{1}{2}$.

$\angle A_{12} = \angle F (= 90^\circ)$
 $\angle D_2 = \angle Z_3$ (F-hoeken) $\left. \vphantom{\begin{matrix} \angle A_{12} = \angle F \\ \angle D_2 = \angle Z_3 \end{matrix}} \right\} \triangle ABD \sim \triangle FBZ$ (hh)

$\frac{AD}{FZ} = \frac{BD}{BZ}$ en Z is het zwaartepunt van $\triangle ABC$, dus $BZ = \frac{2}{3}BD$ en dit geeft $FZ = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{2} = 2\frac{1}{3}$.

Dus opp $\triangle ABZ = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 2\frac{1}{3} = 28$.



Gemengde opgaven

Bladzijde 80

1 a $6(x + 5) = 8$

$$6x + 30 = 8$$

$$6x = -22$$

$$x = \frac{-22}{6} = -3\frac{2}{3}$$

b $\frac{y-3}{5} \mid \frac{2y+1}{3}$ geeft $3(y-3) = 5(2y+1)$

$$3y - 9 = 10y + 5$$

$$-7y = 14$$

$$y = -2$$

$\frac{4}{x} \mid \frac{-2-3}{5}$ geeft $x = \frac{4 \cdot 5}{-5} = -4$

c $(x+7)(x-1) = (x-3)(x+3)$

$$x^2 - x + 7x - 7 = x^2 - 9$$

$$6x = -2$$

$$x = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

2 $\left. \begin{array}{l} \angle A \text{ (in } \triangle ABS) = \angle C \text{ (in } \triangle CDS) \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle B \text{ (in } \triangle ABS) = \angle D \text{ (in } \triangle CDS) \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABS \sim \triangle CDS \text{ (hh)}$

$\frac{AB}{CD} \mid \frac{BS}{DS} \mid \frac{AS}{CS}$ geeft $\frac{6}{4} \mid \frac{BS}{2} \mid \frac{AS}{3}$

$$AS = \frac{6 \cdot 3}{4} = 4\frac{1}{2} \text{ en } BS = \frac{6 \cdot 2}{4} = 3.$$

3 $\left. \begin{array}{l} \angle C \text{ (in } \triangle CDS) = \angle B \text{ (F-hoeken)} \\ \angle S \text{ (in } \triangle CDS) = \angle S \text{ (in } \triangle ABS) \end{array} \right\} \triangle CDS \sim \triangle BAS \text{ (hh)}$

Stel $DS = x$, dan is $AS = 5 + x$.

$\frac{CD}{BA} \mid \frac{DS}{AS} \mid \frac{CS}{BS}$ geeft $\frac{4}{6} \mid \frac{x}{5+x} \mid \frac{8}{BS}$

$$BS = \frac{6 \cdot 8}{4} = 12, \text{ dus } BC = BS - CS = 12 - 8 = 4.$$

$$6x = 4(5 + x)$$

$$6x = 20 + 4x$$

$$2x = 20$$

$$x = 10, \text{ dus } DS = 10.$$

4 a $\left. \begin{array}{l} \angle F_2 = 90^\circ - \angle F_1 \text{ (rechte hoek)} \\ \angle E_1 = 180^\circ - 90^\circ - \angle F_1 = 90^\circ - \angle F_1 \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array} \right\} \angle E_1 = \angle F_2$

$\left. \begin{array}{l} \angle B \text{ (in } \triangle BEF) = \angle B \text{ (in } \triangle ABF) (= 90^\circ) \\ \angle E_1 = \angle F_2 \end{array} \right\} \triangle BEF \sim \triangle BFA \text{ (hh)}$

b $\left. \begin{array}{l} \angle B \text{ (in } \triangle BEF) = \angle D (= 90^\circ) \\ \angle F_1 \text{ (in } \triangle BEF) = \angle F_1 \text{ (in } \triangle CDF) \end{array} \right\} \triangle BEF \sim \triangle DCF \text{ (hh)}$

$\left. \begin{array}{l} \angle B \text{ (in } \triangle BEF) = \angle F_{12} (= 90^\circ) \\ \angle E_1 \text{ (in } \triangle BEF) = \angle E_1 \text{ (in } \triangle AEF) \end{array} \right\} \triangle BEF \sim \triangle FEA \text{ (hh)}$

- c In $\triangle CDF$ is $\angle D = 90^\circ$, dus $CF^2 = CD^2 + DF^2 = 2,5^2 + 6^2 = 42,25$
 $CF = \sqrt{42,25} = 6,5$

Uit $\triangle BEF \sim \triangle DCF$ volgt $\frac{BE}{DC} \mid \frac{EF}{CF} \mid \frac{BF}{DF}$ en dit geeft $\frac{BE}{2,5} \mid \frac{3}{6,5} \mid \frac{BF}{6}$.

$$BF = \frac{3 \cdot 6}{6,5} = 2,76\dots, \text{ dus } BC = CF - BF = 6,5 - 2,76\dots \approx 3,7.$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle BEF \sim \triangle DCF \\ \triangle BEF \sim \triangle FEA \end{array} \right\} \triangle DCF \sim \triangle FEA$$

$$\frac{DC}{FE} \mid \frac{CF}{EA} \mid \frac{DF}{FA} \text{ geeft } \frac{2,5}{3} \mid \frac{6,5}{EA} \mid \frac{6}{FA}$$

$$AF = \frac{3 \cdot 6}{2,5} = 7,2$$

- 5 $\left. \begin{array}{l} \angle D \text{ (in } \triangle DEF) = \angle A \text{ (F-hoeken)} \\ \angle E \text{ (in } \triangle DEF) = \angle E \text{ (in } \triangle AEG) \end{array} \right\} \triangle DEF \sim \triangle AEG \text{ (hh)}$

$$\frac{DE}{AE} \mid \frac{DF}{AG} \text{ geeft } \frac{6}{10,8} \mid \frac{DF}{8,4}$$

$$DF = \frac{6 \cdot 8,4}{10,8} \approx 4,67$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle B \text{ (in } \triangle BGH) = \angle A \text{ (in } \triangle AEG) \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle H \text{ (in } \triangle BGH) = \angle E \text{ (in } \triangle AEG) \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle BGH \sim \triangle AGE \text{ (hh)}$$

$$\frac{BG}{AG} \mid \frac{BH}{AE} \text{ geeft } \frac{3,2}{8,4} \mid \frac{BH}{10,8}$$

$$BH = \frac{3,2 \cdot 10,8}{8,4} \approx 4,11$$

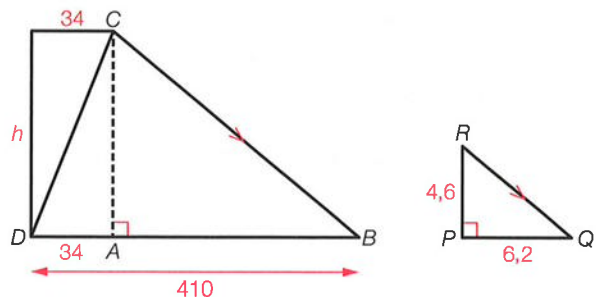
Bladzijde 81

- 6 Zie de figuren hiernaast.
 $\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle P (= 90^\circ) \\ \angle B = \angle Q \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle PQR \text{ (hh)}$
 $AB = 410 - 34 = 376$

$$\frac{AB}{PQ} \mid \frac{AC}{PR} \text{ geeft } \frac{376}{6,2} \mid \frac{AC}{4,6}$$

$$AC = \frac{4,6 \cdot 376}{6,2} \approx 279$$

Dus de hoogte h van de rots is 279 meter.



- 7 In $\triangle ACD$ is $\angle D = 90^\circ$, dus $AC^2 = AD^2 + CD^2 = 6^2 + 14,4^2 = 243,36$
 $AC = \sqrt{243,36} = 15,6$
 In $\triangle BCD$ is $\angle D = 90^\circ$, dus $BC^2 = BD^2 + CD^2 = 19,2^2 + 14,4^2 = 576$
 $BC = \sqrt{576} = 24$
 In $\triangle KLN$ is $\angle L = 90^\circ$, dus $KN^2 = KL^2 - LN^2 = 7,8^2 - 3^2 = 51,84$.
 In $\triangle KMN$ is $\angle N = 90^\circ$, dus $MN^2 = KM^2 - KN^2 = 12^2 - 51,84 = 92,16$
 $MN = \sqrt{92,16} = 9,6$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AC}{KL} = \frac{15,6}{7,8} = 2 \\ \frac{AB}{LM} = \frac{6 + 19,2}{3 + 9,6} = 2 \\ \frac{BC}{KM} = \frac{24}{12} = 2 \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle KLM \text{ (zzz)}$$

8 a Zie de figuur hiernaast.

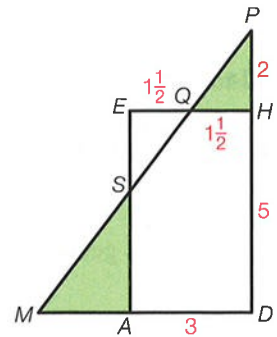
$$\left. \begin{array}{l} \angle D = \angle H (= 90^\circ) \\ \angle P \text{ (in } \triangle DMP) = \angle P \text{ (in } \triangle HMQ) \end{array} \right\} \triangle MDP \sim \triangle QHP \text{ (hh)}$$

$$\frac{MD}{QH} = \frac{DP}{HP} \text{ geeft } \frac{MD}{1\frac{1}{2}} = \frac{7}{2}$$

$$MD = \frac{7 \cdot 1\frac{1}{2}}{2} = 5\frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle E = \angle H (= 90^\circ) \\ \angle S = \angle P \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle EQS \sim \triangle HQP \text{ (hh)}$$

$$\frac{EQ}{HQ} = \frac{ES}{HP} \text{ geeft } \frac{1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}} = \frac{ES}{2}, \text{ dus } ES = 2.$$



b Zie de figuur hiernaast.

$$\left. \begin{array}{l} \angle D = \angle H (= 90^\circ) \\ \angle P \text{ (in } \triangle DNP) = \angle P \text{ (in } \triangle HPR) \end{array} \right\} \triangle PND \sim \triangle PRH \text{ (hh)}$$

$$\frac{PN}{PR} = \frac{PD}{PH} \text{ geeft } \frac{PN}{3\frac{1}{3}} = \frac{7}{2}$$

$$PN = \frac{3\frac{1}{3} \cdot 7}{2} = 11\frac{2}{3}$$

In $\triangle ABD$ is $\angle A = 90^\circ$, dus $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

$$BD = \sqrt{25} = 5$$

In $\triangle HRP$ is $\angle H = 90^\circ$, dus $HR^2 + HP^2 = PR^2$

$$HR^2 + 2^2 = (3\frac{1}{3})^2$$

$$HR^2 = (3\frac{1}{3})^2 - 2^2 = 7\frac{1}{9}$$

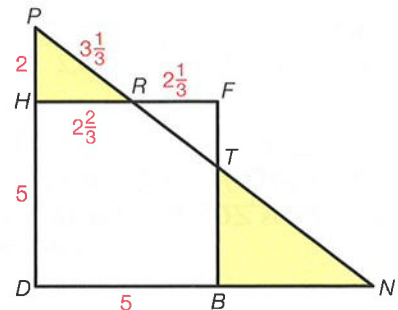
$$HR = \sqrt{7\frac{1}{9}} = 2\frac{2}{3}$$

$$FR = HF - HR = 5 - 2\frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle H = \angle F (= 90^\circ) \\ \angle R \text{ (in } \triangle HPR) = \angle R \text{ (in } \triangle FRT) \end{array} \right\} \triangle HRP \sim \triangle FRT \text{ (hh)}$$

$$\frac{HR}{FR} = \frac{RP}{RT} \text{ geeft } \frac{2\frac{2}{3}}{2\frac{1}{3}} = \frac{3\frac{1}{3}}{RT}$$

$$RT = \frac{2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{3}}{2\frac{2}{3}} = 2\frac{11}{12}$$



9 MN is een middenparallel van $\triangle ABC$, dus $MN = \frac{1}{2}BC = 8$.

CM is zwaartelijn, dus $AM = \frac{1}{2}AB = 6$.

In $\triangle ABC$ is $\angle A = 90^\circ$, dus $AC^2 + AB^2 = BC^2$

$$AC^2 + 12^2 = 16^2$$

$$AC^2 = 16^2 - 12^2 = 112$$

$$AC = \sqrt{112} = 10,583...$$

BN is zwaartelijn, dus $AN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 10,583... = 5,291...$

In $\triangle ACM$ is $\angle A = 90^\circ$, dus $CM^2 = AM^2 + AC^2 = 6^2 + 112 = 148$

$$CM = \sqrt{148} = 12,165...$$

Z is het zwaartepunt van $\triangle ABC$, dus $MZ = \frac{1}{3}CM = \frac{1}{3} \cdot 12,165... \approx 4,06$.

In $\triangle ABN$ is $\angle A = 90^\circ$, dus $BN^2 = AB^2 + AN^2 = 12^2 + 5,291...^2 = 172$

$$BN = \sqrt{172} = 13,114...$$

Z is het zwaartepunt van $\triangle ABC$, dus $NZ = \frac{1}{3}BN = \frac{1}{3} \cdot 13,114... \approx 4,37$.

Diagnostische toets

Bladzijde 84

1 a $\frac{7}{2} \mid \frac{11}{x}$ geeft $x = \frac{2 \cdot 11}{7} = 3\frac{1}{7}$ b $\begin{aligned} 5(2x + 3) &= 4(x - 1) \\ 10x + 15 &= 4x - 4 \\ 6x &= -19 \\ x &= \frac{-19}{6} = -3\frac{1}{6} \end{aligned}$

c $\begin{aligned} 3y &= 4 - y \\ 4y &= 4 \\ y &= 1 \end{aligned}$

2 Hierbij hoort de verhoudingstabel $\frac{4,2}{5,1} \mid \frac{a}{7,5} \mid \frac{5,5}{b}$.

$\frac{4,2}{5,1} \mid \frac{a}{7,5}$ geeft $a = \frac{4,2 \cdot 7,5}{5,1} \approx 6,2$

$\frac{4,2}{5,1} \mid \frac{5,5}{b}$ geeft $b = \frac{5,1 \cdot 5,5}{4,2} \approx 6,7$

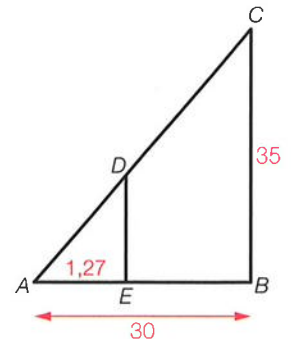
3 $\left. \begin{aligned} \angle C &= \angle D (= 90^\circ) \\ \angle B \text{ (in } \triangle ABC) &= \angle B \text{ (in } \triangle BDE) \end{aligned} \right\} \triangle ABC \sim \triangle EBD \text{ (hh)}$
In $\triangle ABC$ is $\angle C = 90^\circ$, dus $AB^2 = AC^2 + BC^2$
 $AB^2 = 8^2 + 6^2 = 100$
 $AB = \sqrt{100} = 10$

$\frac{AB}{EB} \mid \frac{BC}{BD} \mid \frac{AC}{ED}$ geeft $\frac{10}{6,5} \mid \frac{8}{BD} \mid \frac{6}{ED}$
 $DE = \frac{6,5 \cdot 6}{10} = 3,9$ en $BD = \frac{6,5 \cdot 8}{10} = 5,2$.

4 Zie de figuur hiernaast.
 $AE = 127 \text{ cm} = 1,27 \text{ m}$ en de lengte van Coen is DE .
 $\left. \begin{aligned} \angle B &= \angle E (= 90^\circ) \\ \angle A \text{ (in } \triangle ABC) &= \angle A \text{ (in } \triangle ADE) \end{aligned} \right\} \triangle ABC \sim \triangle AED \text{ (hh)}$

$\frac{AB}{AE} \mid \frac{BC}{ED} \mid \frac{AC}{AD}$ geeft $\frac{30}{1,27} \mid \frac{35}{ED} \mid \frac{AC}{AD}$
 $DE = \frac{1,27 \cdot 35}{30} \approx 1,48$

Dus de lengte van Coen is 148 cm.



5 $\left. \begin{aligned} \angle A &= \angle D \text{ (in } \triangle DPQ) \text{ (F-hoeken)} \\ \angle P \text{ (in } \triangle ABP) &= \angle P \text{ (in } \triangle DPQ) \end{aligned} \right\} \triangle ABP \sim \triangle DQP \text{ (hh)}$

$\frac{AB}{DQ} \mid \frac{BP}{QP} \mid \frac{AP}{DP}$ geeft $\frac{6}{DQ} \mid \frac{BP}{QP} \mid \frac{5,5}{1,5}$
 $DQ = \frac{6 \cdot 1,5}{5,5} \approx 1,6$

Bladzijde 85

- 6** $\angle A = \angle D$ (in $\triangle BDE$) (F-hoeken)
 $\angle B$ (in $\triangle ABC$) = $\angle B$ (in $\triangle BDE$) $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \angle A = \angle D \\ \angle B = \angle B \end{array}} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DBE$ (hh)

Stel $BE = x$, dan is $BC = x + 4,8$.

$$\frac{AB}{DB} \mid \frac{BC}{BE} \mid \frac{AC}{DE} \text{ geeft } \frac{AB}{2,6} \mid \frac{x + 4,8}{x} \mid \frac{5,4}{1,8}$$

$$5,4x = 1,8(x + 4,8)$$

$$5,4x = 1,8x + 8,64$$

$$3,6x = 8,64$$

$$x = \frac{8,64}{3,6} = 2,4, \text{ dus } BE = 2,4.$$

$$AB = \frac{2,6 \cdot 5,4}{1,8} = 7,8 \text{ en } AD = AB - BD = 7,8 - 2,6 = 5,2.$$

- 7 a** Zie de figuur hiernaast.

$$\left. \begin{array}{l} \angle D = \angle H (= 90^\circ) \\ \angle P \text{ (in } \triangle ADP) = \angle P \text{ (in } \triangle HPQ) \end{array} \right\} \triangle ADP \sim \triangle QHP \text{ (hh)}$$

$$\frac{AD}{QH} \mid \frac{DP}{HP} \text{ geeft } \frac{6}{QH} \mid \frac{5}{2}$$

$$HQ = \frac{6 \cdot 2}{5} = 2\frac{2}{5}$$

- b** Zie de figuur hiernaast.

$$\left. \begin{array}{l} \angle H = \angle G (= 90^\circ) \\ \angle P = \angle U \text{ (in } \triangle GRU) \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle HPR \sim \triangle GUR \text{ (hh)}$$

$$\frac{HP}{GU} \mid \frac{HR}{GR} \text{ geeft } \frac{2}{GU} \mid \frac{3}{2}$$

$$GU = \frac{2 \cdot 2}{3} = 1\frac{1}{3}$$

- c** Zie de figuur van vraag b.

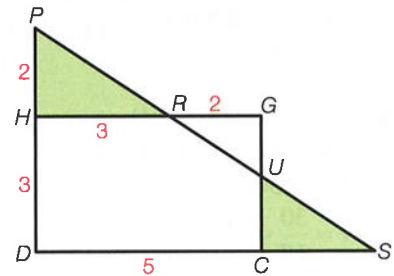
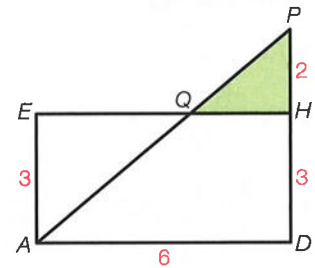
$$\left. \begin{array}{l} \angle D = \angle H (= 90^\circ) \\ \angle P \text{ (in } \triangle DPS) = \angle P \text{ (in } \triangle HPR) \end{array} \right\} \triangle DPS \sim \triangle HPR \text{ (hh)}$$

$$\frac{DP}{HP} \mid \frac{DS}{HR} \text{ geeft } \frac{5}{2} \mid \frac{DS}{3}$$

$$DS = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7\frac{1}{2}$$

$$\text{In } \triangle ADS \text{ is } \angle D = 90^\circ, \text{ dus } AS^2 = AD^2 + DS^2 = 6^2 + (7\frac{1}{2})^2 = 92\frac{1}{4}$$

$$AS = \sqrt{92\frac{1}{4}} \approx 9,6$$



- 8 a** $\angle C_1 = \angle C_2 = 60^\circ$ (gelijkzijdige driehoek)
 $BC : AC = 1 : 1$ (gelijkzijdige driehoek ABC)
 $CE : CD = 1 : 1$ (gelijkzijdige driehoek CDE) $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \angle C_1 = \angle C_2 \\ BC : AC = 1 : 1 \\ CE : CD = 1 : 1 \end{array}} \right\} \triangle BCE \sim \triangle ACD$ (zhz)

- b** $\triangle BCE \sim \triangle ACD$, dus $\frac{BC}{AC} \mid \frac{BE}{AD} \left. \vphantom{\frac{BC}{AC} \mid \frac{BE}{AD}} \right\} BE = AD$
 $BC = AC$ (gelijkzijdige driehoek ABC)

- 9 a KM is een middenparallel van $\triangle PQR$, dus $KM = \frac{1}{2}QR = 4,2$.
 b $KQ = KP = 5,6$
 In $\triangle KMQ$ is $\angle K = 90^\circ$, dus $MQ^2 = KM^2 + KQ^2 = 4,2^2 + 5,6^2 = 49$
 $MQ = \sqrt{49} = 7$
 Z is het zwaartepunt van $\triangle PQR$, dus $QZ = \frac{2}{3}MQ = \frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$.
 c $LQ = LR = 4,2$ en $PQ = 2 \cdot 5,6 = 11,2$.
 In $\triangle LPQ$ is $\angle Q = 90^\circ$, dus $LP^2 = PQ^2 + LQ^2 = 11,2^2 + 4,2^2 = 143,08$
 $LP = \sqrt{143,08} = 11,961\dots$
 Z is het zwaartepunt van $\triangle PQR$, dus $LZ = \frac{1}{3}LP = \frac{1}{3} \cdot 11,961\dots \approx 4,0$.

Herhaling

Bladzijde 86

- 1 a $x = \frac{9 \cdot 5}{7} = 6\frac{3}{7}$
 b $x = \frac{5 \cdot 9}{13} = 3\frac{6}{13}$
 c $\frac{3}{x} \mid \frac{11}{17}$ geeft $x = \frac{3 \cdot 17}{11} = 4\frac{7}{11}$
 $\frac{11}{17} \mid \frac{5}{y}$ geeft $y = \frac{17 \cdot 5}{11} = 7\frac{8}{11}$
- 2 a $7(3x - 2) = 4(x + 4)$
 $21x - 14 = 4x + 16$
 $17x = 30$
 $x = \frac{30}{17} = 1\frac{13}{17}$
 b $\frac{3}{11} \mid \frac{x+5}{7x-5}$ geeft $3(7x - 5) = 11(x + 5)$
 $21x - 15 = 11x + 55$
 $10x = 70$
 $x = 7$
 $\frac{3}{11} \mid \frac{7}{y}$ geeft $y = \frac{11 \cdot 7}{3} = 25\frac{2}{3}$
- 3 $\frac{13}{9} \mid \frac{7}{a}$ geeft $a = \frac{9 \cdot 7}{13} = 4\frac{11}{13}$
 $\frac{13}{9} \mid \frac{11}{b}$ geeft $b = \frac{9 \cdot 11}{13} = 7\frac{8}{13}$
- 4 a $\left. \begin{array}{l} \angle C \text{ (in } \triangle ABC) = \angle C \text{ (in } \triangle CDE) \\ \angle B = \angle D (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle EDC \text{ (hh)}$
 b $\frac{AB}{ED} \mid \frac{BC}{DC} \mid \frac{AC}{EC}$
 c In $\triangle ABC$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$
 $AC = \sqrt{169} = 13$
 d $\frac{AB}{ED} \mid \frac{BC}{DC} \mid \frac{AC}{EC}$ geeft $\frac{5}{ED} \mid \frac{12}{DC} \mid \frac{13}{5}$
 $DE = \frac{5 \cdot 5}{13} \approx 1,9$ en $CD = \frac{12 \cdot 5}{13} \approx 4,6$.

Bladzijde 87

- 5 a Zie de figuur hiernaast.
 $\left. \begin{array}{l} \angle B = \angle E \text{ (F-hoeken)} \\ \angle A = \angle D (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DEF \text{ (hh)}$

$$\frac{AB}{DE} \mid \frac{AC}{DF} \text{ geeft } \frac{4,20}{DE} \mid \frac{12,40}{16,65}$$

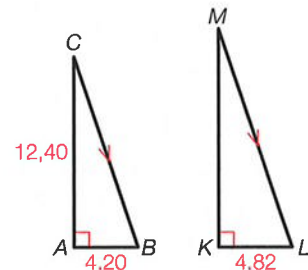
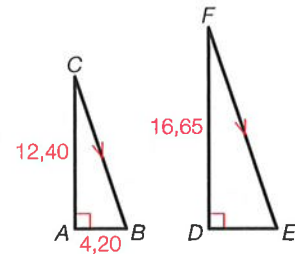
$$DE = \frac{4,20 \cdot 16,65}{12,40} \approx 5,64$$

Dus de lengte van de schaduw van mast II is 564 cm.

- b Zie de figuur hiernaast.
 $\left. \begin{array}{l} \angle B = \angle L \text{ (F-hoeken)} \\ \angle A = \angle K (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle KLM \text{ (hh)}$

$$\frac{AB}{KL} \mid \frac{AC}{KM} \text{ geeft } \frac{4,20}{4,82} \mid \frac{12,40}{KM}$$

$$KM = \frac{4,82 \cdot 12,40}{4,20} \approx 14,23, \text{ dus mast III is 14,23 meter.}$$



- 6 a $\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle D_1 \text{ (F-hoeken)} \\ \angle B = \angle E_1 \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DEC \text{ (hh)}$

b $\frac{AB}{DE} \mid \frac{AC}{DC} \text{ geeft } \frac{12}{DE} \mid \frac{10}{3}$

$$DE = \frac{12 \cdot 3}{10} = 3,6$$

- 7 a $\left. \begin{array}{l} \angle P = \angle T \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle R = \angle S \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle PQR \sim \triangle TQS \text{ (hh)}$

b Uit $\triangle PQR \sim \triangle TQS$ volgt $\frac{PR}{TS} \mid \frac{QR}{QS}$ en dit geeft $\frac{5}{TS} \mid \frac{6}{4}$.

$$ST = \frac{5 \cdot 4}{6} = 3\frac{1}{3}$$

8 $4,5x = 3,2(x + 2,5)$

$$4,5x = 3,2x + 8$$

$$1,3x = 8$$

$$x = \frac{8}{1,3} \approx 6,2, \text{ dus } CD \approx 6,2.$$

Bladzijde 88

- 9 a $\left. \begin{array}{l} \angle A \text{ (in } \triangle ADQ) = \angle P \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle D = \angle C \text{ (in } \triangle CPQ) \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ADQ \sim \triangle PCQ \text{ (hh)}$

$$DQ = CD - CQ = 5,2 - 2,9 = 2,3$$

$$\frac{AD}{PC} \mid \frac{DQ}{CQ} \text{ geeft } \frac{1,8}{PC} \mid \frac{2,3}{2,9}$$

$$PC = \frac{1,8 \cdot 2,9}{2,3} \approx 2,3$$

- b $\left. \begin{array}{l} \angle P \text{ (in } \triangle ABP) = \angle P \text{ (in } \triangle CPQ) \\ \angle B = \angle C \text{ (in } \triangle CPQ) \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABP \sim \triangle QCP \text{ (hh)}$

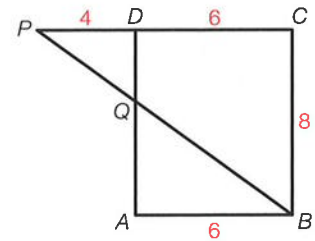
$$\frac{AB}{QC} \mid \frac{AP}{QP} \text{ geeft } \frac{5,2}{2,9} \mid \frac{8,1}{QP}$$

$$PQ = \frac{8,1 \cdot 2,9}{5,2} \approx 4,5$$

- 10 a** Zie de figuur hiernaast.
 $\angle P$ (in $\triangle DPQ$) = $\angle P$ (in $\triangle BCP$)
 $\angle D = \angle C (= 90^\circ)$ } $\triangle PQD \sim \triangle PBC$ (hh)

$$\frac{PD}{PC} \mid \frac{QD}{BC} \text{ geeft } \frac{4}{10} \mid \frac{QD}{8}$$

$$DQ = \frac{4 \cdot 8}{10} = 3\frac{1}{5}$$



- b** Zie de figuur hiernaast.
 $\angle U$ (in $\triangle RUH$) = $\angle P$ (Z-hoeken)
 $\angle H = \angle D (= 90^\circ)$ } $\triangle UHR \sim \triangle PDR$ (hh)

$$\frac{UH}{PD} \mid \frac{HR}{DR} \text{ geeft } \frac{UH}{4} \mid \frac{5}{5}, \text{ dus } UH = 4.$$

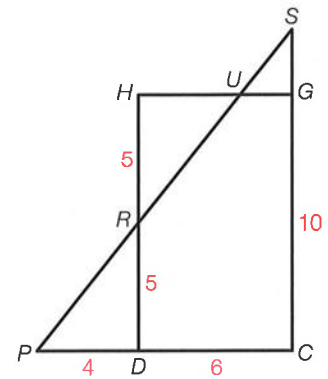
- c** Zie de figuur van vraag b.
 $\angle P$ (in $\triangle DPR$) = $\angle P$ (in $\triangle CPS$)
 $\angle D = \angle C (= 90^\circ)$ } $\triangle DPR \sim \triangle CPS$ (hh)

$$\frac{DP}{CP} \mid \frac{DR}{CS} \text{ geeft } \frac{4}{10} \mid \frac{5}{CS}$$

$$CS = \frac{10 \cdot 5}{4} = 12\frac{1}{2} \text{ en } GS = CS - CG = 12\frac{1}{2} - 10 = 2\frac{1}{2}.$$

$$\text{In } \triangle BCS \text{ is } \angle C = 90^\circ, \text{ dus } BS^2 = BC^2 + CS^2 = 8^2 + (12\frac{1}{2})^2 = 220\frac{1}{4}$$

$$BS = \sqrt{220\frac{1}{4}} \approx 14,84$$



- 11 a** $\angle C_1 = 60^\circ - \angle C_2$ (gelijkzijdige driehoek ABC)
 $\angle C_3 = 60^\circ - \angle C_2$ (gelijkzijdige driehoek CDE) } $\angle C_1 = \angle C_3$
 $\angle C_1 = \angle C_3$
 $AC : BC = 1 : 1$ (gelijkzijdige driehoek ABC)
 $CD : CE = 1 : 1$ (gelijkzijdige driehoek CDE) } $\triangle ACD \sim \triangle BCE$ (zhz)

- b** $\triangle ACD \sim \triangle BCE$, dus $\frac{AC}{BC} \mid \frac{AD}{BE}$ } $AD = BE$
 $AC = BC$ (gelijkzijdige driehoek ABC)

- 12 a** DE is middenparallel, dus $AB = 2DE = 11$.
b Twee zwaartelijnen verdelen elkaar in stukken die zich verhouden als 1 : 2.
 $DZ = \frac{1}{2}AZ = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$
c $BE = 3EZ = 3 \cdot 4 = 12$

Onderzoek Bewijzen uit het ongerijmde**Bladzijde 89**

1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0

- 2 Zet je een 0 naast een van de andere twee nullen, dan komen er drie enen in de overgebleven vakjes. Er staan dan drie gelijke cijfers naast elkaar, en dat mag niet.

Bladzijde 90

- 3 a In de vakjes moeten nog een nul en twee enen komen.
- Stel ik zet een 0 in één van de gekleurde vakjes.
 - Dan komt er een 1 in elk van de overige lege vakjes.
 - In de laatste drie vakjes komen dan drie enen naast elkaar te staan, en dat mag niet.
 - Er kan in de gekleurde vakjes dus geen 0 komen te staan.
 - Dus in beide gekleurde vakjes moet een 1 staan.

0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0			1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	--	---

- b In de vakjes moeten nog een nul en twee enen komen.
- Stel ik zet een 0 in het eerste of het tweede gekleurde vakje.
 - Dan komt er in elk van de andere twee gekleurde vakjes een 1 te staan.
 - In het eerste vakje na de gekleurde vakjes staat ook een 1, dus dan komen er drie enen naast elkaar te staan, en dat mag niet.
 - Er kan in het eerste en in het tweede gekleurde vakje dus geen 0 komen te staan.
 - Dus in het eerste en in het tweede gekleurde vakje moet een 1 staan, en dus in het derde gekleurde vakje een 0, en in het vierde gekleurde vakje een 1.

0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- c In de vakjes moeten nog drie nullen en twee enen komen.
- In de lege witte vakjes kunnen niet twee nullen of twee enen komen, want dan staan er of drie nullen of drie enen naast elkaar, en dat mag niet. Dus in de twee lege witte vakjes komen een 0 en een 1.
- In de gekleurde vakjes moeten dan nog twee nullen en een 1 komen.
- Stel ik zet een 1 in het eerste gekleurde vakje.
 - Dan komt er in elk van de andere twee gekleurde vakjes een 0 te staan.
 - In de drie laatste vakjes komen dan drie nullen naast elkaar te staan, en dat mag niet.
 - Stel ik zet een 1 in het laatste gekleurde vakje.
 - Dan komt er in elk van de andere twee gekleurde vakjes een 0 te staan.
 - In de drie voor-na-laatste vakjes komen dan drie nullen naast elkaar te staan, en dat mag niet.
 - Er kan in het eerste en in het derde gekleurde vakje dus geen 1 komen te staan.
 - Dus in het eerste gekleurde vakje moet een 0 staan, in het tweede gekleurde vakje een 1, en in het derde gekleurde vakje een 0.

1			0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
---	--	--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1

5 a *

- b
- Zowel sneller als langzamer vallen is met elkaar in tegenspraak.
 - Dus de aanname 'we vallen niet even snel' moet wel onjuist zijn.
 - We vallen dus even snel.

6

- Dit is in tegenspraak met de aanname 'x is het grootste getal dat kleiner is dan 10'.
- Dus de aanname 'x is het grootste getal dat kleiner is dan 10' is onjuist.
- Er bestaat dus geen grootste getal dat kleiner is dan 10.

Bladzijde 91

7

- Stel x is het kleinste getal dat groter is dan 100.
- Het gemiddelde g van x en 100 is kleiner dan x en groter dan 100.
- Er is dus een getal g dat kleiner is dan x en groter is dan 100.
- Dit is in tegenspraak met de aanname 'x is het kleinste getal dat groter is dan 100'.
- Dus de aanname 'x is het kleinste getal dat groter is dan 100' is onjuist.
- Er bestaat dus geen kleinste getal dat groter is dan 100.

8

- Stel x is het grootste getal.
- Het getal $g = x + 1$ is groter dan x.
- Er is dus een getal g dat groter is dan x.
- Dit is in tegenspraak met de aanname 'x is het grootste getal'.
- Dus de aanname 'x is het grootste getal' is onjuist.
- Er bestaat dus geen grootste getal.

9

- Stel er is geen chauffeur met acht of meer boetes.
- Het maximale aantal boetes dat de 68 chauffeurs samen hebben gekregen is dan $68 \cdot 7 = 476$.
- Dit is in tegenspraak met het totale aantal van 477 boetes.
- Dus de aanname 'er is geen chauffeur met acht of meer boetes' is onjuist.
- Er is dus minstens één chauffeur die acht of meer boetes heeft gekregen.

10

- Stel er is geen dag waarop minstens zeven leerlingen jarig zijn.
- Het maximale aantal leerlingen dat op het Regiuscollege kan zitten is dan $365 \cdot 6 = 2190$.
- Dit is in tegenspraak met het totale aantal van 2197 leerlingen.
- Dus de aanname 'er is geen dag waarop minstens zeven leerlingen jarig zijn' is onjuist.
- Er zijn dus minstens zeven leerlingen van het Regiuscollege op dezelfde dag jarig.

11

- a $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
- b Als k een geheel getal is, dan is $2k^2 + 2k$ dat ook.
Stel $2k^2 + 2k = m$, dan is $p^2 = 2m + 1$ met m een geheel getal, en dus is p^2 een oneven getal.
- c Als p is oneven, dan volgt hieruit dat p^2 is oneven.
Dus p is oneven levert nooit op dat p^2 is even.
Dus als p^2 een even getal is, dan moet p een even getal zijn.